

Concours commun I.N.A et E.N.S.A

MATIÈRES A OPTION

Option générale

Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

Durée : 3 heures

MATHÉMATIQUES

Corrigé

Partie I

1. Pour tout $s \in [-1, 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|p_k s^k| \leq p_k$. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k$ converge, et sa somme vaut 1.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k s^k$ converge absolument.

2. (a) Par définition $g(0) = p_0$ ($0^0 = 1$) et $g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ (il s'agit d'une loi de probabilité).
(b) Si X est une variable de Bernoulli, alors $\forall s \in \mathbb{R}$, $g_X(s) = 1 - p + ps$.
(c) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. D'où, pour tout $s \in [-1, 1]$, $g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$.

3. Pour tout $s \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, on a $|v_k| = |k p_k s^{k-1}| \leq \frac{1}{|s|} p_k |s|^k$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k |s|^k$ converge. Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge absolument. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge absolument pour $s = 0$.

De même, si $s \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ on a $|w_k| = |k(k-1) p_k s^{k-2}| \leq \frac{1}{|s|^2} p_k |s|^k$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k |s|^k$ converge. Donc

$\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge absolument. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge absolument pour $s = 0$.

4. On a $g'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E(X)$ et $g''(1) + g'(1) - g'(1)^2 = V(X)$.

Pour la loi de Bernoulli, on a $G_X(s) = 1 - p + ps$, $G'_X(s) = p$ et $G''_X(s) = 0$. D'où $E(X) = p$ et $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $(Z = k) = \bigcup_{i=0}^k (X = i, Y = k - i)$ (réunion disjointe). D'où :

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \sum_{i=0}^k p(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k p(X = i) p(Y = k - i) \quad (X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \end{aligned}$$

Donc, pour $s \in [-1, 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 h(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} p(Z = k) s^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k p(X = i) p(Y = k - i) \right) s^k \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} p(X = i) s^i \sum_{k=i}^{\infty} p(Y = k - i) s^{k-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} p(X = i) s^i \sum_{l=0}^{\infty} p(Y = l) s^l \\
 &= f(s) \times g(s)
 \end{aligned}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_{Z_n} la fonction génératrice de Z_n . Montrons que $G_{Z_n} = g^n$. En effet, d'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $n = 2$. Supposons la vraie pour n . On a alors, pour tout $s \in [-1, 1]$:

$$G_{Z_{n+1}}(s) = G_{Z_n + X_{n+1}}(s) = G_{Z_n}(s) \times g(s) = g^n(s) \times g(s) = g^{n+1}(s).$$

Et la propriété est vraie pour $n + 1$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors X peut être considérée comme somme de n variable aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ de Bernoulli et indépendantes. D'où, d'après ce qui précède, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$g(s) = f^n(s) = (1 - p + sp)^n.$$

Partie II

1. (a) Par définition, $\forall s \in [-1, 1]$, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi_1 = k) s^k$. Donc $|g(s)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi_1 = k) |s|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi_1 = k) = 1$.

D'où $g(s) \in [-1, 1]$.

- (b) X_1 et ξ_1 ont même loi, donc même fonction génératrice. D'où $g_1 = g$.

- (c) Notons $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. D'après ce qui précède, la fonction génératrice de S_n est g^n . On remarque que

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^j \xi_i = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i = S_{X_n}. \text{ Soit maintenant } k \in X_{n+1}(\Omega), \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned}
 p(X_{n+1} = k) &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_{X_n} = k, X_n = j) \\
 &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_{X_n} = k / X_n = j) p(X_n = j) \\
 &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_j = k) p(X_n = j)
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_j = k) p(X_n = j) \right) s^k \\
&= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(X_n = j) \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(S_j = k) s^k \right) \\
&= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(X_n = j) (g(s))^j \\
&= g_n(g(s)) \\
&= g^{(n+1)}(s)
\end{aligned}$$

Donc on peut conclure par le principe de récurrence.

2. • Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $E(X_n) = m^n$. La propriété est vraie pour $n = 1$ puisque $E(X_1) = E(\xi_1) = m$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n . On a :

$$E(X_{n+1}) = g'_{(n+1)}(1) = (g \circ g_n)'(1) = g'(g_n(1)) \times g'_n(1) = E(X_1) \times E(X_n) = m^{n+1}.$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = m^n$.

• On a $V(X_1) = \sigma^2$. Supposons $V(X_n) = \sigma^2 m^{n-1} (1 + m + \dots + m^{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la propriété pour $n + 1$. En effet, on sait que $V(X_{n+1}) = g''_{n+1}(1) + g'_{n+1}(1) - (g'_{n+1}(1))^2$. D'autre part, pour tout $t \in]-1, 1[$, $g'_{n+1}(t) = g'(g_n(t)) \times g'_n(t)$ et

$$g''_{n+1}(t) = g''(g_n(t)) \times (g'_n(t))^2 + g'(g_n(t)) \times g''_n(t)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
V(X_{n+1}) &= g''_{n+1}(1) + g'_{n+1}(1) - (g'_{n+1}(1))^2 \\
&= g''(1) \times (g'_n(1))^2 + g'(1) \times g''_n(1) + g'_{n+1}(1) - (g'_{n+1}(1))^2 \\
&= (\sigma^2 - m + m^2) m^{2n} + m(V(X_n) - m^n + m^{2n}) + m^{n+1} - m^{2(n+1)} \\
&= (\sigma^2 - m + m^2) m^{2n} + m(\sigma^2 m^{n-1} (1 + m + \dots + m^{n-1}) - m^n + m^{2n}) + m^{n+1} - m^{2(n+1)} \\
&= \sigma^2 m^n (1 + m + \dots + m^{n-1} + m^n).
\end{aligned}$$

- On a $V(X_n) = \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}$. Donc $V(X_n)$ décroît lorsque n croît.

Partie III

1. La série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k s^k$ ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, on a $\forall s \in [0, 1[, g'(s) =$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \text{ et } g''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}.$$

Comme $0 < p_0 < 1$ (par hypothèse et comme les p_k sont des probabilités), on a l'existence de $k_0 > 0$ tel que $p_{k_0} > 0$.

Ainsi : $\forall s \in]0, 1[$,

$$g'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0-1} > 0$$

Donc, par la caractérisation par dérivée, g est strictement croissante sur $]0, 1[$.

De même $\forall s \in]0, 1[$,

$$g''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \geq k_0(k_0-1) p_{k_0} s^{k_0-2} \geq 0$$

Donc, par la caractérisation par dérivée, g' est croissante sur $]0, 1[$.

Si $p_0 + p_1 = 1$, alors (comme les p_k sont des probabilités) $g(s) = p_0 + p_1 s$ est affine donc n'est pas strictement convexe.

Sinon, $p_0 + p_1 < 1$, alors il existe $k_0 > 1$ tel que $p_{k_0} > 0$ (car les p_k sont des probabilités) et $g'' > 0$ (car $k_0 - 1 > 0$) sur $]0, 1[$, d'où la stricte monotonie de g sur $]0, 1[$.

2. (a) Soit $\varphi(s) = g(s) - s$ pour $s \in [0, 1[$. On a $\varphi'(s) = g'(s) - 1 < g'(1) - 1 = m - 1 < 0$. Donc φ est strictement décroissante sur $[0, 1[$, donc $\varphi(s) > \varphi(1) = 0$. D'où $\forall s \in [0, 1[$, $g(s) > s$.
- (b) Si $m > 1$, alors $\varphi'(1) = m - 1 > 0$ et $\varphi'(0) = g(0) - 1 = p_0 - 1 < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $q \in [0, 1[$ tel que $\varphi(q) = 0$ ou encore $g(q) = q$.
- (c) L'allure de courbe représentative de la restriction de g sur l'intervalle $[0, 1]$ dans les $m < 1$, $m = 1$ et $m > 1$.

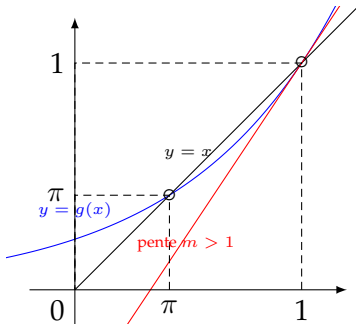


FIGURE 1 – Cas $m > 1$.

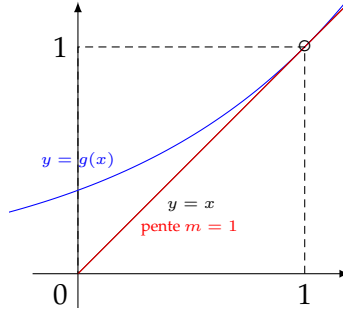


FIGURE 2 – Cas $m = 1$ avec $p_0 + p_1 < 1$.

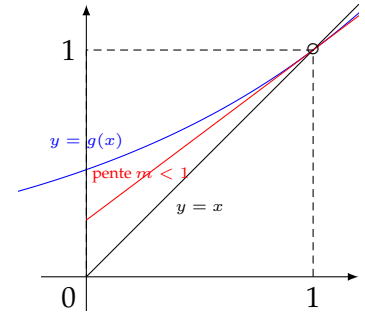


FIGURE 3 – Cas $m < 1$.

3. Comme $X_n = 0$ implique $X_{n+1} = 0$, alors la suite des événements $(X_n = 0)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et comme $\{ \exists r, r \geq 1 \mid X_r = 0 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X_n = 0)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(X_n = 0) = p\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X_n = 0)\right) = p(\{ \exists r, r \geq 1 \mid X_r = 0 \}).$$

Mais on a aussi

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X_n = 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{p=1}^n (X_p = 0) \right)$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} p(X_n = 0) = p\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{p=1}^n (X_p = 0) \right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{p=1}^n p(X_p = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\{ \exists r, 1 \leq r \leq n \mid X_r = 0 \}.$$

4. Par définition $g_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X_n = 0) s^0 = p(X_n = 0)$.
5. (a) L'événement $X_n = 0$ entraîne l'événement $X_{n+1} = 0$, donc $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante, majorée par 1 (ce sont des probabilités), donc converge. Or $u_{n+1} = g_{X_{n+1}}(0) = g^{n+1}(0) = g(g^n(0)) = g(u_n)$.
Lorsque n tend vers $+\infty$, (u_n) tend vers q l'unique point fixe de g . (u_n) tend aussi vers q . La fonction g étant continue en p , $(g(u_n))$ tend vers $g(q)$. Or $u_{n+1} = g(u_n)$, donc par unicité de la limite $q = g(q)$.
- (b) Si $x \in]q, 1[$, alors $u_1 = g_1(x) = g(x) < x$ puis par récurrence on montre que la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Comme précédemment u_n tend vers l'unique point fixe q .
- (c) Si $x = q$ ou $x = 1$, alors la suite u_n est constante.

En conclusion, si $m \leq 1$, alors $\pi = 1$. Si $m > 1$, alors π est l'unique point fixe de g sur $]0, 1[$.

6. (a) On sait que $g(s) = e^{(t-1)s}$ pour tout $s \in [-1, 1]$. Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers q , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers q . La fonction g étant continue en q , $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $g(q)$. Or $u_{n+1} = g(u_n)$,

donc par unicité de la limite $q = f(q)$. Donc, d'après ce qui précède π , limite d'extinction est l'unique point fixe de g .

$$\pi = g(\pi).$$

(b) On a $m = g'(1) = \lambda$. Donc deux cas sont possibles :

• $\lambda \leq 1$.

Posons, pour tout $s \in [0, 1]$, $\varphi(s) = g(s) - s$. $\forall s \in [0, 1]$, $\varphi(s) = g(s) - s = e^{\lambda(s-1)} - s$, $\varphi'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} - 1$.
 $\forall s \in [0, 1[$, $s - 1 < 0$ donc $e^{\lambda(s-1)} < 1$, donc $\lambda e^{\lambda(s-1)} < \lambda \leq 1$ et $\varphi' < 0$ sur $[0, 1]$.

s	0	1
$\varphi'(s)$		—
	$e^{-\lambda}$	
φ		0

φ est strictement décroissante de $[0, 1]$ sur $[0, e^{-\lambda}]$. Le seul zéro de φ est 1. Or les zéros de φ sont les point fixes de g , donc nécessairement $\pi = 1$. La probabilité d'extinction est donc 1.

• $\lambda > 1$.

$\forall s \in [0, 1]$, $\varphi(s) = g(s) - s = e^{\lambda(s-1)} - s$, $\varphi'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} - 1$ et $\varphi''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} > 0$. φ' est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$ dans $J = [\lambda e^{-\lambda} - 1, \lambda - 1]$ donc réalise une bijection entre ces deux intervalles.

On sait que $\ln \lambda < \lambda^1$, donc $\lambda < e^\lambda$ et $\lambda e^{-\lambda} - 1 < 0$.

Comme $\lambda - 1 > 0$, 0 est élément de J . Il existe donc un unique $\beta \in]0, 1[$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$. φ' est négative sur $[0, \beta]$ et positive sur $[\beta, 1]$.

s	0	α	β	1
$\varphi'(s)$	$\lambda e^{-\lambda} - 1 < 0$	—	0	+
	$e^{-\lambda}$			0
φ				0

φ est strictement décroissante sur $[0, \beta]$ et strictement croissante sur $[\beta, 1]$. $\varphi(1)$ étant égal à 0, nécessairement $\varphi(\beta) < 0$. La restriction de φ à $[0, \beta]$ réalise une bijection entre $[0, \beta]$ et $[\varphi(\beta), e^{-\lambda}]$. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]0, \beta[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. Or $\varphi(\alpha) = 0$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.

Donc il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = \alpha$. g est continue strictement croissante de $[0, \alpha]$ dans $[e^{-\lambda}, \alpha] \subset [0, \alpha]$. Le segment $[0, \alpha]$ est stable par g . Comme $u_0 = 0$, on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \alpha]$. La limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc élément de $[0, \alpha]$. Or on a vu que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point fixe de g . Le seul point fixe de g dans ce segment est α , donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers α et par conséquent $\pi = \alpha$. La probabilité d'extinction dans ce cas est strictement inférieure à 1.

(c) Pour $\lambda = 1.3$ on obtient $\pi \simeq 0.577$.

1. $\forall x > 1, \ln x < x$.

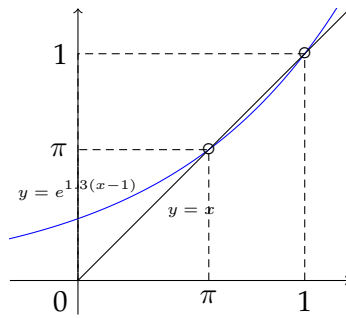


FIGURE 4 – Probabilité d’extinction π pour une loi de Poisson.

• • • • •